SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Finaltävling i Luleå den 25 november 2006

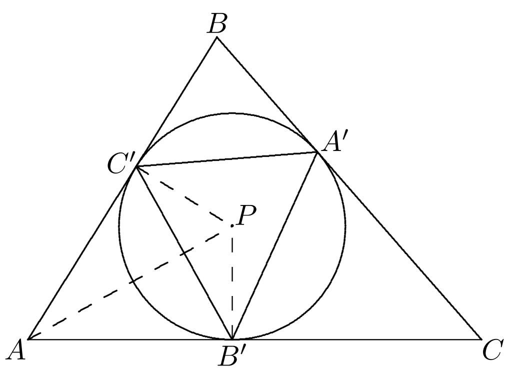
Förslag till lösningar

Problem 1. Antag att de positiva heltalen a och b har 99 respektive 101 olika positiva delare (1 och talet självt inräknade). Kan produkten ab ha 150 olika positiva delare?

Lösning: Låt n vara ett positivt heltal. Om k är en positiv delare till n, så är också $\frac{n}{k}$ en delare till n. Delarna k och $\frac{n}{k}$ sammanfaller, $k = \frac{n}{k}$, om och endast om $n = k^2$, dvs om n är ett kvadrattal. I så fall är $\sqrt{n}$ en delare till n.
Allmänt gäller att om $1 = k_1 < k_2 < \ldots < k_m$ alla är är delare till n och mindre än $\sqrt{n}$, så är $n = \frac{n}{k_1} > \frac{n}{k_2} > \ldots > \frac{n}{k_m}$ alla större än $\sqrt{n}$ och också delare till n. Om n är ett kvadrattal tillkommer delaren $\sqrt{n}$. Det betyder att om n inte är ett kvadrattal, så är antalet delare ett jämnt tal, medan om n är ett kvadrattal, är antalet delare udda.
Exempelvis har talet 18, vilket kan skrivas som $18 = 1\cdot 18 = 2\cdot 9 = 3\cdot 6$, tre delare som är mindre än $\sqrt{18}$: 1, 2 och 3, samt tre delare som är större: 6, 9 och 18, alltså totalt sex delare. Men talet 36, vilket kan skrivas som $36 = 1\cdot 36 = 2\cdot 18 = 3\cdot 12 = 4\cdot 9 = 6\cdot 6$, har fyra delare som är mindre än $\sqrt{36} = 6$, fyra delare som är större än 6 och kvadratroten själv, dvs sammanlagt nio delare.
Eftersom såväl a som b har ett udda antal delare, måste båda vara kvadrattal. Men i så fall måste också produkten ab vara ett kvadrattal och följaktligen ha ett udda antal delare. Talet ab kan alltså *inte* ha 150 delare.
Går det att hitta tal med resp 99 och 101 delare? Ja, exempelvis har kvadrattalet 2^{98} 99 delare, nämligen $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $2^2, \ldots, 2^{98}$. Analogt inser man att kvadrattalet 2^{100} har 101 delare, medan produkten, kvadrattalet 2^{198}, har 199 delare.
Svar: Nej, talet ab kan *inte* ha 150 delare. Antalet delare måste vara udda.

Problem 2. I triangeln ABC skär bisektriserna varandra i punkten P. Låt A', B' och C' vara de vinkelräta projektionerna av P på sidorna BC, AC och AB respektive. Visa att vinkeln $B'A'C'$ är spetsig.

Lösning: Punkten P utgör medelpunkt i den till triangeln ABC inskrivna cirkeln. Cirkeln tangerar triangeln i projektionspunkterna A', B' och C'. Vinkeln $B'A'C'$ är randvinkel och vinkeln $B'PC'$ medelpunktsvinkel på samma cirkelbåge, varav följer att $\angle B'A'C' = \frac{1}{2}\angle B'PC'$. Betrakta fyrhörningen $AB'PC'$. Eftersom $\angle AB'P = \angle AC'P = 90°$, gäller det att $\angle B'PC' = 180° - \angle B'AC' = 180° - \angle CAB$. Alltså är $\angle B'A'C' = 90° - \frac{1}{2}\angle CAB < 90°$. Egenskapen är givetvis inte unik för just denna vinkel: triangeln $A'B'C'$ är spetsvinklig.



Problem 3. Ett tredjegradspolynom f har tre olika reella nollställen a, b och c. Koefficienten för x^3 är positiv. Visa att

$$f'(a) + f'(b) + f'(c) > 0.$$

Lösning: Polynomet kan skrivas

$$f(x) = A(x-a)(x-b)(x-c), \text{ där } A > 0.$$

Enligt regeln för derivering av en produkt får vi

$$f'(x) = A\{(x-a) \cdot \frac{d}{dx}(x-b)(x-c) + \big(\frac{d}{dx}(x-a)\big) \cdot (x-b)(x-c)\}$$

Eftersom $\frac{d}{dx}(x-b)(x-c) = (x-b) + (x-c)$ enligt nämnda produktregel, finner vi att

$$f'(x) = A\{(x-a)(x-b) + (x-a)(x-c) + (x-b)(x-c)\}.$$

Vi får alltså

$$f'(a) + f'(b) + f'(c) = A\{(a-b)(a-c) + (b-a)(b-c) + (c-a)(c-b)\}.$$

Men summan av de två första produkterna i högerledet, $(a-b)(a-c)+(b-a)(b-c)$, kan skrivas $(a-b)(a-c-b+c) = (a-b)^2$. På samma sätt inser vi att summan av den första och sista produkten, $(a-b)(a-c)+(c-a)(c-b)$, kan skrivas som $(a-c)^2$, medan summan av de båda sista produkterna, $(b-a)(b-c)+(c-a)(c-b)$ antar formen $(b-c)^2$. I dessa omskrivningar har varje produkt använts två gånger, varför det gäller att

$$f'(a) + f'(b) + f'(c) = \frac{A}{2}\{(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2\}.$$

Men kvadraterna i högerledet är alla > 0, vilket innebär att $f'(a) + f'(b) + f'(c) > 0$ och påståendet är därmed visat.

Problem 4. Saskia och hennes systrar har fått ett stort antal pärlor som gåva. Pärlorna är vita, svarta och röda i varierande antal. De vita är värda 5 dukater, de svarta 7 dukater och de röda 12 dukater stycket. Totala värdet av pärlorna är 2 107 dukater. Saskia och hennes systrar delar upp pärlorna så att alla får lika många och till samma värde, men färgfördelningen varierar mellan andelarna. Intressant nog är värdet av varje andel, uttryckt i antalet dukater, lika med antalet pärlor som systrarna totalt ska dela på. Saskia är speciellt förtjust i de röda pärlorna och ser till att hennes andel innehåller maximalt antal av dessa. Hur många vita, svarta och röda pärlor får Saskia?

Lösning: Låt f vara antalet systrar, Saskia inräknad, och antag att var och en har n pärlor till ett värde av m dukater.
Totala värdet av pärlorna är $f \cdot m = 2\,107$ dukater medan totala antalet pärlor är $f \cdot n = m$, varav

$$f^2 \cdot n = f \cdot m = 2\,107\,.$$

Vi har $2\,107 = 7 \cdot 301 = 7^2 \cdot 43$. Eftersom $m > n$ (varje pärla är ju värd mer än en dukat) och därmed $f > 1$, är enda möjligheten att $f = 7$, $n = 43$ och $m = 301$. Det är alltså 7 systrar; var och en har 43 pärlor till ett värde av 301 dukater.

Låt Saskia ha v vita, s svarta och r röda pärlor. Följande samband ska gälla:

$$\begin{aligned} &(1) \qquad & v + \;\; s + \;\;\; r &= \;\, 43 \\ &(2) \qquad & 5v + 7s + 12r &= 301\,. \end{aligned}$$

Insättning av $v = 43 - s - r$ i ekv 2 ger $5(43 - s - r) + 7s + 12r = 301$ eller

$$(3) \qquad 2s + 7r = 86\,.$$

Vi inser att $r \leq 12$. Med $r = 12$ blir $s = 1$ och $v = 30$ och detta är en lösning till ekvationerna 1 och 2. Det betyder att Saskia har 30 vita, 1 svart och 12 röda pärlor. Detta är den enda möjliga färgkombinationen som ger maximala antalet röda pärlor, 12 stycken.
Enligt förutsättningarna varierade färgfördelningarna mellan systrarna. Är det möjligt att åstadkomma sju olika färgkombinationer? Enligt ekv 3 måste r vara ett jämnt tal för att s ska vara ett heltal. Möjliga värden på r är därför 12, 10, 8, 6, 4, 2 och 0. Motsvarande värden på s är resp 1, 8, 15, 22, 29, 36 och 43, medan motsvarande värden på v är resp 30, 25, 20, 15, 10, 5 och 0. Sambanden 1 och 2 är uppfyllda för dessa sju kombinationer. Det är alltså möjligt att fördela pärlorna mellan de sju systrarna så att alla färgfördelningar är olika. Summering visar att av de totalt 301 pärlorna är 105 vita, 154 svarta och 42 röda.

Svar: Saskia har 30 vita, 1 svart och 12 röda pärlor.

Problem 5. En rektangel delas in i m gånger n rutor. I varje ruta sätter man ett kryss eller en ring. Låt $f(m,n)$ vara antalet sådana arrangemang som innehåller en rad eller kolumn med enbart ringar. Låt $g(m,n)$ vara antalet arrangemang som innehåller antingen en rad med enbart ringar eller en kolumn med enbart kryss. Vilket tal är störst, $f(m,n)$ eller $g(m,n)$?

Lösning: Betrakta ett bräde av godtycklig storlek. Låt A beteckna händelsen att det finns en *rad* med enbart *ringar*, låt B vara händelsen att det finns en *kolumn* med enbart *ringar*, samt låt C beteckna händelsen att det finns en *kolumn* med enbart *kryss*. Vi låter vidare AB vara skärningen av händelserna A och B, dvs AB anger att det finns såväl en rad som en kolumn med enbart ringar. Vi observerar att AB innehåller minst ett element för varje val av m och n, medan händelserna A och C är varandra uteslutande, dvs skärningen AC saknar element.

Låt $h_X(m,n)$ beteckna antalet arrangemang för vilket en händelse X är uppfylld. Vi finner att

$$f(m,n) = h_A(m,n) + h_B(m,n) - h_{AB}(m,n)$$

(antalet arrangemang som omfattar händelsen AB finns med bland såväl A- som B-arrangemangen). Vidare har vi

$$g(m,n) = h_A(m,n) + h_C(m,n) = h_A(m,n) + h_B(m,n)$$

(antalet arrangemang som innehåller en kolumn med ringar måste vara detsamma som antalet som innehåller en kolumn med kryss). Vi ser direkt av dessa uttryck att $f(m,n) < g(m,n)$ gäller för alla m och n.

Svar: Talet $g(m,n)$ är störst.

Problem 6. Bestäm alla positiva heltal a, b, c sådana att

$$a^{(b^c)} = (b^a)^c \,.$$

Lösning: Då $(b^a)^c = b^{ac} = (b^c)^a$, kan ekvationen skrivas

$$a^{(b^c)} = (b^c)^a,$$

dvs den har formen $x^y = y^x$, där $x = a$ och $y = b^c$. Eftersom x och y är positiva heltal, kan ekvationen alternativt skrivas

$$x^{\frac{1}{x}} = y^{\frac{1}{y}} \,. \tag{1}$$

Betrakta funktionen $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, först för reella tal $x \geq 1$, därefter för heltal $x \geq 1$. Derivering ger

$$f'(x) = \tfrac{d}{dx}\, x^{\frac{1}{x}} = \tfrac{d}{dx}\, e^{\frac{1}{x}\ln x} = x^{\frac{1}{x}}\big(\tfrac{1}{x}\cdot\tfrac{1}{x} + (-\tfrac{1}{x^2})\cdot \ln x\big) = x^{\frac{1}{x}}\cdot \tfrac{1}{x^2}(1-\ln x),$$

vilket är

$$\begin{cases} > 0 \text{ för } x < e \\ = 0 \text{ för } x = e \\ < 0 \text{ för } x > e \,. \end{cases}$$

Funktionen $f(x)$ har således ett lokalt maximum för $x = e$, är monotont växande för $x < e$ och monotont avtagande för $x > e$.

Sett till positiva heltal är $f(x)$ växande för $x \leq 2$ och avtagande för $x \geq 3$. Vi har $f(1) = 1$, $f(2) = 2^{\frac{1}{2}}$, $f(3) = 3^{\frac{1}{3}}$, $f(4) = 4^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}}$, medan $f(x) < 2^{\frac{1}{2}}$ för $x \geq 5$. Vi noterar att $f(2) < f(3)$, eftersom $2^3 < 3^2$, att $f(2) = f(4)$, men att funktionsvärdena skiljer sig åt för alla övriga par av heltal (x, y) där $x \neq y$.

Vi särskiljer följande tre fall av lösningar till ekv 1:

Fall 1: $x = 2$, $y = 4$, som ger $a = 2$ och $b^c = 4$, dvs $b = 4$, $c = 1$ eller $b = 2$, $c = 2$. Vi har därför lösningarna $(a, b, c) = (2, 4, 1)$ och $(2, 2, 2)$ till den ursprungliga ekvationen.

Fall 2: $x = 4$, $y = 2$, som ger $a = 4$ och $b^c = 2$, dvs $b = 2$, $c = 1$. Vi får lösningen $(a, b, c) = (4, 2, 1)$.

Fall 3: $x = y$, $x = 1, 2, \ldots$, vilket innebär att $a = b^c$. Således är $(a, b, c) = (b^c, b, c)$ en lösning till originalekvationen för varje par av positiva heltal $(b,\, c)$.

Svar: $(a, b, c) = (2, 4, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(4, 2, 1)$, samt (b^c, b, c) för alla positiva heltal b, c.