SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Finaltävling den 20 november 2010

Förslag till lösningar

Problem 1. Finns det en triangel vars tre höjder har måtten 1, 2 respektive 3 längdenheter?

Lösning. Låt T beteckna triangelarean. Trianglarnas sidor har då längderna $2T$, T, $\frac{2}{3}T$ resp. Enligt triangelolikheten gäller att summan av två sidolängder, vilka som helst, alltid överstiger den tredje sidans längd, dvs om sidlängderna är a, b och c, så gäller $a+b>c$, $a+c>b$ och $b+c>a$. Men för den aktuella triangeln gäller inte detta överallt; vi har nämligen $T+\frac{2}{3}T=\frac{5}{3}T<2T$. Det finns alltså ingen triangel med de givna höjdmåtten.

Svar. Någon sådan triangel finns inte.

Problem 2. Betrakta fyra linjer $y=kx-k^2$ för olika heltal k. Fyra olika punkter (x_i, y_i) är sådana att var och en tillhör två olika linjer och på varje linje ligger precis två av dem.
Låt $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$. Visa att $x_1+x_4=x_2+x_3$ och $y_1y_4 = y_2y_3$.

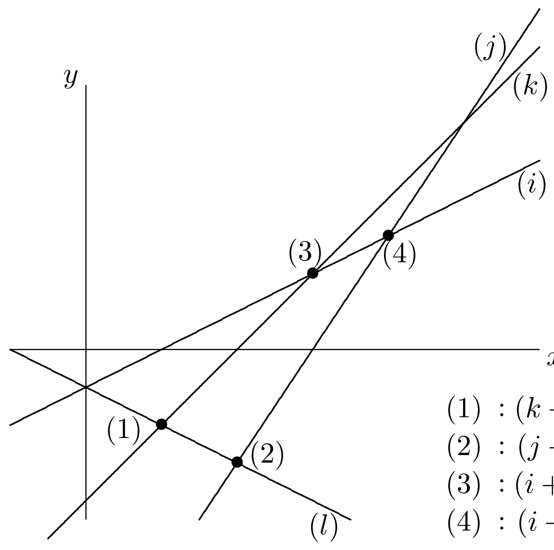
Lösning. Låt (x,y) vara en gemensam punkt till linjerna $y=kx-k^2$ och $y=lx-l^2$, $k \neq l$. Då är

$$x(k-l)=k^2-l^2 \quad \Rightarrow \quad x=k+l \Rightarrow y=k(x-k)=kl\,.$$

Låt $y=ix-i^2$ och $y=jx-j^2$ vara de två återstående linjerna (i,j,k,l är olika heltal). Om $(k+l, kl)$ är en av de fyra punkterna måste exakt en av de övriga punkterna ligga på linjen $y=kx-k^2$ och exakt en på linjen $y=lx-l^2$. Av dessa båda ska den ena ligga på linjen $y=ix-i^2$ och den andra på linjen $y=jx-j^2$. Skärningen mellan linjen $y=ix-i^2$ och linjen $y=jx-j^2$ måste följaktligen vara den fjärde punkten och vi kan utan inskränkning anta att punkternas koordinater är

$$(k+l, kl),\ (i+j, ij),\ (i+k, ik),\ (j+l, jl)\,.$$

(Vart och ett av heltalen i,j,k,l förekommer i exakt två av koordinaterna.)



(1) : $(k+l,\ kl)$
(2) : $(j+l,\ jl)$
(3) : $(i+k,\ ik)$
(4) : $(i+j,\ ij)$

(*Anm.* y-skalan är något hoppressad i förhållande till x-skalan i figuren för att ge bättre överskådlighet.)
Vi kan utan inskränkning anta att $k+l$ är den minsta summan. Det följer att $k+l \le i+k$, varav $l \le i$, och $k+l \le j+l$, varav $k \le j$. Såväl $i+k$ som $j+l$ är därför $\le i+j$, dvs $i+j$ är den största summan. Det gäller alltså att $x_1+x_4 = (k+l)+(i+j) = (i+k)+(j+l) = x_2+x_3$ (vi behöver inte bekymra oss om vilken summa som är störst av $i+k$ och $j+l$), samt att $y_1y_4 = (kl)(ij) = (ik)(jl) = y_2y_3$. Påståendet är därmed visat.

Problem 3. Finn alla naturliga tal $n \ge 1$ sådana att det finns ett polynom $p(x)$ med heltalskoefficienter för vilket $p(1) = p(2) = 0$ och där $p(n)$ är ett primtal.

Lösning. Betrakta polynomet $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$, där $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ är hela tal. Bilda differensen mellan $p(r)$ och $p(s)$ för heltalen r och s:

$$a_1(r-s) + a_2(r^2-s^2) + \ldots + a_m(r^m-s^m).$$

Koefficienten för a_k, $r^k - s^k$, kan för $k = 1, 2, \ldots, m$ skrivas som en produkt av två heltal där den ena faktorn är $r-s$:

$$(r^k - s^k) = (r-s)(r^{k-1} + r^{k-2}s + r^{k-3}s^2 + \ldots + rs^{k-2} + s^{k-1}),$$

dvs $r-s$ är en delare till $p(r)-p(s)$. Antag att villkoren i uppgiften är uppfyllda. Först observerar vi att $n > 2$. Det gäller då att $n-1$ är en positiv delare till $p(n)-p(1) = q$ och $n-2$ en positiv delare till $p(n)-p(2) = q$, där q är ett primtal. Men till ett godtyckligt primtal q finns bara de positiva delarna 1 och q och vi måste ha $n-2 = 1$ och $n-1 = q$, vilket ger $n = q+1 = 3$ och $q = 2$. För att villkoren ska vara uppfyllda måste alltså $n = 3$ och $q = 2$. Det återstår att visa att det existerar ett polynom med nämnda egenskaper; ett sådant är $p(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$.

Svar. $n = 3$.

Problem 4. Vi skapar en talföljd genom att sätta $a_1 = 2010$ och kräva att a_n är det minsta tal som är större än a_{n-1} och dessutom är delbart med n. Visa att a_{100}, a_{101}, $a_{102}, \ldots$ bildar en aritmetisk talföljd.

Lösning: Vi börjar med att konstatera att $a_n - a_{n-1} \le n$, så

$$\begin{aligned} a_{100} &\le a_{99} + 100 \le a_{98} + 100 + 99 \le \ldots \le a_1 + 100 + 99 + \ldots + 2 \\ &= 2010 + \tfrac{102 \cdot 99}{2} < 100^2\,. \end{aligned}$$

Detta visar att $a_{100} = 100k$, för något $k < 100$. För detta k är följden $100k$, $101k$, $102k$, … en aritmetisk talföljd: den allmänna termen är nk för $n \ge 100$. Men mellan två successiva termer nk och $(n+1)k$ är differensen $k < 100 < n+1$. Mellan nk och $(n+1)k$ kan det följaktligen inte finnas något tal som är delbart med $n+1$ för $n \ge 100$. Nämnda aritmetiska följd måste därför vara identisk med den sökta talföljden $a_{100}, a_{101}, a_{102}, \ldots$.
Anm. I själva verket är påståendet sant för $n \ge 50$. Det gäller nämligen att $a_{49} = 2549$, $a_{50} = 2550$, $a_{51} = 2601$, $a_{52} = 2652$ osv. Vi har här en aritmetisk serie med differensen k=51. Talföljden för $n \ge 100$ inleds med $a_{100} = 5100$, $a_{101} = 5151$, $a_{102} = 5202$ osv.

Problem 5. Betrakta mängden av trianglar där sidlängderna uppfyller

$$(a+b+c)(a+b-c) = 2b^2.$$

Bestäm vinklarna i den triangel för vilken vinkeln mitt emot sidan med längden a är så stor som möjligt.

Lösning. Låt hörnen som står mot sidorna med längderna a, b, c vara A, B, C resp. Vi betecknar vinkelmåtten med samma bokstäver som triangelns hörn.
Villkoret kan alternativt skrivas $(a+b)^2 = 2b^2 + c^2$ eller

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\,. \tag{1}$$

Enligt cosinussatsen gäller också

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A\,. \tag{2}$$

Om vi kombinerar (1) och (2) finner vi att villkoret också kan skrivas som

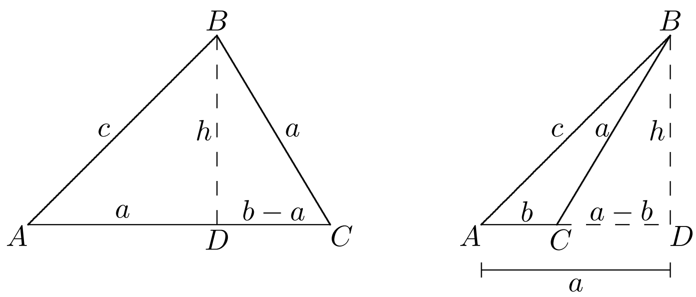
$$2ab = 2bc \cdot \cos A \Leftrightarrow \cos A = \frac{a}{c}\,. \tag{3}$$

Eftersom a, b, c är positiva storheter är $\cos A$ positiv, vilket betyder att vinkeln vid A är $< 90°$. Enligt sinussatsen gäller vidare att

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}\,. \tag{4}$$

Av (3) och (4) följer att $\tan A = \sin C$. Vinkeln A är maximal när $\tan A$ är så stor som möjligt och vi finner att $0 < \tan A \leq 1$ med likhet om och endast om $\sin C = 1$, dvs när $A = 45°$ och $C = 90°$ samt $B = 45°$. För denna triangel gäller $a = b$ och $c = \sqrt{2}b$ och insättning visar att villkoret är uppfyllt.

Alternativ lösning. Efter att ha noterat sambandet (3) och konstaterat att $0 < A < 90°$ kan vi använda följande geometriska resonemang. Låt oss fixera a och variera b och c i förhållande till a. Låt D vara fotpunkten till höjden mot AC eller dess förlängning och låt mätetalet för höjden vara h (varierar när b och c varierar). Att maximera vinkeln A är ekvivalent med att maximera $\tan A$.



Vi observerar att mätetalet för höjden inte kan överstiga längden av sidan BC och vi får

$$\tan A = \frac{h}{a} \leq \frac{a}{a} = 1,$$

med likhet om och endast om $h = a$, vilket inträffar när D sammanfaller med C (och endast då), dvs när triangeln ABC är rät med rät vinkel vid C. Men $\tan A = 1 \Leftrightarrow A = 45°$. Det betyder att vinkeln vid B är $45°$.

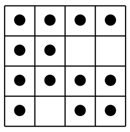
Svar. Den sökta maximala vinkeln är $45°$. De båda övriga vinklarna är $45°$ och $90°$.

Problem 6. Ett ändligt antal rutor på ett oändligt rutat papper är målade röda. Visa att man på papperet kan rita in ett antal kvadrater, med sidor utefter rutnätets linjer, sådana att:

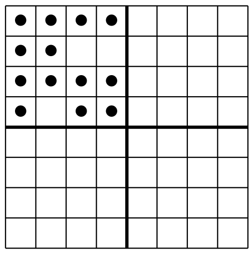
(1) ingen ruta i nätet tillhör mer än en kvadrat (en kant kan däremot tillhöra mer än en kvadrat),

(2) varje *röd* ruta ligger i någon av kvadraterna och antalet röda rutor i en sådan kvadrat är minst $\frac{1}{5}$ och högst $\frac{4}{5}$ av antalet rutor i kvadraten.

Lösning. Eftersom antalet röda rutor är ändligt, går det att för något $n \geq 1$ hitta en kvadrat med sidan 2^n sådan att samtliga röda rutor befinner sig i kvadraten. Låt $p(n)$ vara andelen rutor när sidlängden är 2^n. Låt oss välja det minsta heltalet n för vilket alla röda rutor inneslutes. Om $r(n) \geq \frac{4}{5}$, bildar vi i stället en kvadrat med sidan 2^{n+1}. Vi har då fyra gånger så många rutor och vi får $\frac{1}{5} \leq r(n+1) \leq \frac{1}{4}$. Se nedanstående exempel med $n = 2$, där röda rutor är markerade med punkter.



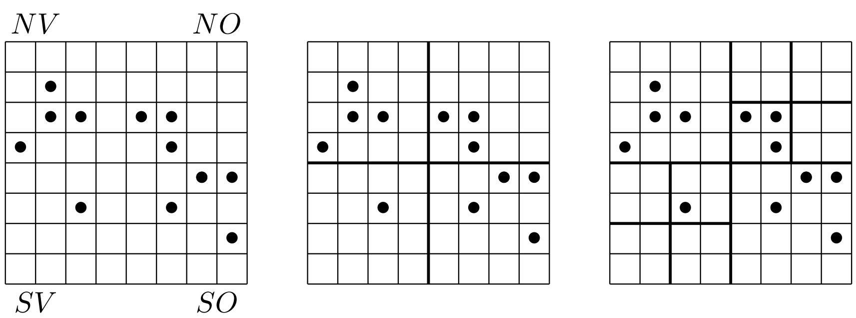
$r(2) = \frac{13}{16} > \frac{4}{5}$



$\frac{1}{5} < r(3) = \frac{13}{64} < \frac{4}{5}$

Om för något $n \geq 1$ alla röda rutor inneslutes i en kvadrat så att $r(n) < \frac{1}{5}$, delar vi in kvadraten i fyra delkvadrater med sidan 2^{n-1}. För varje sådan delkvadrat gäller att $r(n-1) \leq \frac{4}{5}$, ty om det för någon delkvadrat gäller att $r(n-1) > \frac{4}{5}$, måste $r(n) > \frac{1}{5}$ i föregående steg, motsägelse.

Betrakta en delkvadrat i taget. Om $r(n-1) \geq \frac{1}{5}$ för någon delkvadrat har vi åstadkommit en kvadrat av önskat slag. Om däremot $r(n-1) < \frac{1}{5}$ för någon delkvadrat, fortsätter vi proceduren genom att dela in kvadraten i fyra mindre delkvadrater med sidan 2^{n-2}. Vi kan på detta sätt göra en fortsatt indelning i mindre delkvadrater tills alla röda rutor innesluts i kvadrater sådana att kvoten röda rutor uppfyller villkoren. Den minsta kvadrat som vi på detta sätt kan bilda har sidan 2. Vi behöver bara ta hänsyn till kvadrater som innehåller minst en röd ruta; om en kvadrat med sidan 2 innehåller minst en och högst tre röda rutor är villkoren uppfyllda. Vi noterar att fallet med fyra röda rutor i en delkvadrat med sidan 2 aldrig är aktuell, eftersom vi då i föregående steg måste ha haft en kvot som överstiger $\frac{1}{5}$. I nedanstående figur ges ett exempel där vi startar med en kvadrat med sidan 2^3.



I figuren till vänster har vi 12 röda rutor av totalt 64, vilket ger $r(3) = \frac{3}{8} < \frac{1}{5}$. Vi går därför vidare till figuren i mitten, där vi har fyra delkvadrater, för vilka två uppfyller villkoren: NV och SO. De båda övriga, NO och SV, gör det inte, vilket leder till fortsatt indelning i delkvadrater.

Vi har i detta fall fått två kvadrater med sidan 4, där andelen röda rutor är $\frac{1}{4}$ i båda fallen, och två delkvadrater med sidan 2, där andelen röda rutor är $\frac{3}{4}$ resp. $\frac{1}{4}$.