

SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 27 september 2011

1. En medeltida stad är omgiven av hög stadsmur. Muren består av raka partier som i hörnen bildar räta vinklar med varandra. På dess ovansida finns en väg som inte skär sig själv och som regelbundet patrulleras av vakter. Det är känt att en vakt börjar och slutar sin runda på samma ställe mitt på ett rakt parti (mitt emellan två hörn), att han vid sin rundvandring hela tiden har staden på sin vänstra sida, samt att han svänger höger 30 gånger. Hur många gånger svänger han vänster?

2. Antalet elever i en gymnasieskola är 1300. Vissa elever sjunger i skolkören, medan somliga elever tränar friidrott. En fjärdedel av dem som tränar friidrott sjunger även i kören, medan andelen elever som tränar friidrott bland dem som sjunger i kören är fyra gånger så stor som andelen elever som tränar friidrott bland dem som inte sjunger i kören. Hur många elever sjunger i skolans kör?

3. Finn alla reella lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y - z &= 2, \\ x^2 + y^2 - z^2 &= 0, \\ xyz &= 60. \end{cases}$$

4. I fyrhörningen $ABCD$ är $|AC| = 2|BC|$. Vidare gäller $\angle ABD = \angle DBC = \angle DAC$. Man vet att $\angle ADC = 90^\circ$. Bestäm fyrhörningens övriga vinklar.

5. Vi säger att varje positivt heltal N har en familj som består av N samt alla positiva heltal man kan få genom att ordna om N 's siffror, utom dem som vid omordningen får en nolla som första siffra. (T.ex. har talet 101 familjen $\{101, 110\}$.) Vi säger också att N 's familj gillar det positiva heltalet p om N eller något annat tal i familjen är delbart med p . (Alla tal som familjen ovan gillar är 1,2,5,10,11,22,55,101,110.) Bestäm alla tresiffriga tal vars familjer gillar samtliga udda tal mindre än 12.

6. Är det möjligt att dela upp de positiva heltalen i två oändliga mängder A och B som inte har något tal gemensamt och som är sådana att summan av 2011 godtyckligt valda olika tal från A ligger i A och summan av 2011 godtyckligt valda olika tal från B ligger i B ? Vad blir svaret om man på båda ställena byter ut 2011 mot 2012?

Skrivtid: 5 timmar

Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!

Om ca en vecka kommer lösningarna att finnas utlagda på nätet under adress www.mattetavling.se