

SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Finaltävling i Stockholm den 22 november 2008

1. En romb är inskriven i en konvex fyrhörning. Rombens sidor är parallella med fyrhörningens diagonaler, som har längderna d_1 och d_2 . Beräkna längden av rombens sida, uttryckt i d_1 och d_2 .
2. Bestäm det minsta heltal $n \geq 3$ med egenskapen att man kan välja två av talen $1, 2, \dots, n$ på ett sådant sätt att deras produkt är lika med summan av de övriga $n - 2$ talen. Vilka är de två talen?
3. Funktionen $f(x)$ har egenskapen att $\frac{f(x)}{x}$ är växande för $x > 0$. Visa att

$$f(x) + f(y) \leq f(x + y), \quad \text{för alla } x, y > 0.$$

4. En konvex n -hörning har vinklar v_1, v_2, \dots, v_n (i grader), där alla v_k ($k = 1, 2, \dots, n$) är positiva heltal delbara med 36.
 - a) Bestäm det största n för vilket detta är möjligt.
 - b) Visa att om $n > 5$, så måste två av n -hörningens sidor vara parallella.
5. Anna och Örjan spelar följande spel: de börjar med ett positivt heltal $n > 1$ som Anna skriver som summan av två andra positiva heltal, $n = n_1 + n_2$. Örjan stryker ett av dem, n_1 eller n_2 . Om det återstående talet är större än 1 upprepas processen, d.v.s. Anna skriver det som summan av två positiva heltal, $n_3 + n_4$, Örjan stryker ett av dem etc. Spelet slutar när det återstående talet är 1. Örjan är vinnare om det finns två lika tal bland de tal som han har strukit, annars vinner Anna. Vem vinner spelet om $n = 2008$ och båda två spelar optimalt?
6. En uppdelning av talet 100 ges av ett positivt heltal n och n positiva heltal $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ sådana att $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 100$. Bestäm det största möjliga värdet av produkten $x_1 x_2 \dots x_n$, då n, x_1, x_2, \dots, x_n varierar bland alla uppdelningar av talet 100.

Skrivtid: 5 timmar

Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!