

SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 27 september 2016

1. Kims väg till skolan leder förbi flera trafikljus som är jämnt utspridda på vägen, det vill säga de delar vägen i lika långa sträckor. Inget trafikljus ligger vid starten, och inget ligger vid skolan. En morgon känner Kim för att förlänga sin väg på morgonen och bestämmer sig för följande: vid varje trafikljus som lyser grönt går Kim vidare; vid varje trafikljus som lyser rött backar Kim till föregående trafikljus (eller hem, om det är det första ljuset) och vänder sen mot skolan igen. Kim backar högst en gång vid varje trafikljus. Om Kims väg den morgonen blivit dubbelt så lång som vanligt, visa att det den dagen varit fler trafikljus som lyst rött än grönt. Hur många fler kan det ha varit?

2. Betrakta två olika koncentriska cirklar och cirkelringen mellan dem. Två räta linjer som är vinkelräta mot varandra skär varandra inuti den mindre cirkeln och delar därmed cirkelringen i fyra delar. Man målar delarna i vitt och svart på ett sådant sätt att delar som gränsar till varandra har olika färg. Visa att de vita delarna av ringen tillsammans har samma area som de svarta delarna tillsammans.

3. Bestäm alla positiva heltal a, b, c , sådana att

$$\begin{cases} abc = 2016, \\ (a-1)(b-1)(c-1) = 1573. \end{cases}$$

4. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen

$$x^3 - \sqrt{x^2 - 1} + 1 = 0.$$

5. Triangeln ABC är inskriven i en cirkel. Tangenten till cirkeln i hörnet B är parallell med bisektrisen till vinkeln vid A , och tangenten i hörnet A är parallell med bisektrisen till vinkeln vid C . Bestäm triangelns vinklar.

6. Låt b vara ett fixt positivt heltal. En talföljd som består av positiva heltal bildas enligt följande regel: Om ett tal a i följderna är jämnt, ges nästa tal av $\frac{a}{2}$. Om ett tal a i följderna är udda, ges nästa tal av $2a + b$. För vilka b når talföljden alltid 1 oavsett startpunkt?

Skrivtid: 5 timmar

Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!

Lösningarna kommer att finnas utlagda på www.mattetaavling.se efter den 31 oktober.