

SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 30 september 2014

1. Ett tåg kör fram och tillbaka dygnet runt mellan Aby och Bro med lika långa uppehåll vid ändstationerna, och med samma tidtabell alla dagar i veckan. Under varje resa stannar tåget endast en gång, vid Mo.

Jens åker med tåget från Aby, stiger av i Mo för att handla och återvänder till Aby när tåget nästa gång stannar i Mo. Hans uppehåll i Mo har då varat 50 min. Jenny åker från Bro till Mo, och åker sedan hem nästa gång tåget stannar på väg mot Bro. Hennes uppehåll i Mo blir 30 min.

Hur många gånger stannar tåget i Mo under ett dygn? Vi bortser från den tid det tar för tåget att stanna till i Mo, samt antar att tåget är i rörelse vid midnatt.

2. Medelvärde av tolv reella tal är 20. Medelvärde av de tal som är större än 20 är 27, medan medelvärde av de tal som är mindre än 20 är 17. Visa att minst ett av de tolv talen måste vara lika med 20.

3. Punkterna P, Q, R och S väljs på sidorna av kvadraten $ABCD$, så att P ligger på AB , Q på BC , R på CD och S på DA , och så att sträckorna AP, BQ, CR, DS är lika långa. Punkten M inuti kvadraten $ABCD$ är sådan att arean av fyrhörningen $SDRM$ är 24 cm^2 , arean av $RCQM$ är 41 cm^2 och arean av $QBPM$ är 70 cm^2 . Bestäm arean av fyrhörningen $PASM$. (Du kan ta för givet att det finns en punkt M som uppfyller villkoret.)

4. Sträckorna AP och BQ är höjder i triangeln ABC . Triangelns vinkel vid hörnet C är 100° . Punkten M är mittpunkt på sidan AB . Bestäm vinkeln PMQ .

5. I en skolklass får en elev en påse med 2014 enkronor från läraren medan de övriga eleverna inte har några pengar alls. Varje gång två elever träffas delar de pengarna de har tillsammans lika om det är ett jämnt antal kronor, medan de lägger en krona i klasskassan och delar lika på resten om de har ett udda antal kronor tillsammans. Efter lång tid har detta hänt många gånger och det visar sig att alla pengarna ligger i klasskassan. Hur många elever måste det minst ha varit i klassen?

6. Låt a och b vara två positiva heltal sådana att $8a^2 + 2a = 3b^2 - b$. Visa att både $2a + b$ och $4a - 2b + 1$ är kvadrater av heltal.

Skrivtid: 5 timmar

Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!

Lösningarna kommer att finnas utlagda på www.mattetavling.se efter den 31 oktober.