

SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 25 september 2012

1. Sex punkter som ligger på en cirkel betecknas i tur och ordning moturs med A, B, C, D, E och F . Om man har tre olika färger, på hur många sätt kan man färglägga de sex cirkelbågarna mellan intilliggande punkter så att AB och DE har samma färg, BC och EF har samma färg och CD och FA har samma färg, och intilliggande bågar är olikfärgade?

2. Ett taxibolag i landet Taxia tillämpar två olika prismodeller beroende på den fart man åker med. Resan kostar 30 cent per kilometer då taxibilen kör med en fart som är större än v_0 km i timmen, och 10 cent per minut under perioder då farten är lägre än v_0 km i timmen. Hur ska man välja v_0 så att priset vid resa med konstant fart v_0 blir lika stort med båda sätten att räkna?

3. Sidorna i en triangel har längderna a, b och $2b$ för två reella tal a och b som uppfyller likheten $\frac{1}{2b+a} + \frac{1}{2b-a} = \frac{4}{b}$. Bestäm triangelns vinklar.

4. På en tavla står sex positiva heltal i rad. För vart och ett av talen, utom det sista, gäller att summan av det talet och det dubbla värdet av det nästföljande talet alltid är lika med 72. Bestäm de sex talen.

5. Beteckna med $\lceil x \rceil$ det minsta heltal som är större än eller lika med x (t.ex. $\lceil 8 \rceil = 8$, $\lceil \pi \rceil = 4$). Hur många olika heltal finns bland talen

$$\left\lceil \frac{2012}{n} \right\rceil, \quad n = 1, 2, \dots?$$

6. Betrakta alla punkter i planet som har heltalskoordinater. Ursprungligen tänker vi oss att alla dessa punkter är blåfärgade. Därefter färgas n^2 av dem röda, för något positivt heltal n . Ett tvåfärgat grannpar består av en röd och en blå punkt som befinner sig intill varandra i vertikalt eller horisontellt led (en punkt kan ingå i flera tvåfärgade grannpar). Visa att det finns åtminstone $4n$ tvåfärgade grannpar.

Skrivtid: 5 timmar

Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!

Den 23 oktober 2012 kommer lösningarna att finnas utlagda på nätet under adress www.mattetavling.se